

文章编号: 1000-7598-(2005) 12-1921-05

非线性弹性地基上矩形薄板的主参数共振

杨志安^{1,2}, 赵雪娟², 席晓燕²

(1. 天津大学 机械工程学院, 天津 300072; 2. 唐山学院唐山市结构与振动工程重点实验室, 唐山 063000)

摘 要: 分析非线性弹性地基上受参数激励小挠度矩形薄板的主参数共振问题, 由冯卡门方程和伽辽金方法得到系统的非线性振动方程, 它是杜分-马休型方程, 应用非线性振动的多尺度法得到平均方程。数值计算结果表明: 阻尼系数、地基系数、几何参数对主参数共振曲线影响明显。

关 键 词: 非线性弹性地基; Galerkin 方法; 多尺度法; 矩形薄板; 主参数共振

中图分类号: TU 470

文献标识码: A

Primary parametric resonance of thin rectangular plate on nonlinear elastic foundation

YANG Zhi-an^{1,2}, ZHAO Xue-juan², XI Xiao-yan²

(1. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China;

2. Key Laboratory of Structural and Vibration Engineering of Tangshan, Tangshan College, Tangshan 063000, China)

Abstract: Primary parametric resonance of a parametrically excited simply supported thin rectangular plate on nonlinear elastic foundation is analyzed. The nonlinear vibration equation that has the form of a Mathieu-Duffing's equation is derived from the Von Karman equation and Galerkin's method. The method of multiple scales is used to find the averaged equation. Numerical results are presented to illustrate the effect of various parameters including damping parameter, foundation coefficient as well as geometry parameter.

Key words: nonlinear elastic foundation; Galerkin's method; the method of multiple scales; thin rectangular plate; primary parametric resonance

1 引 言

地基板是工程中常见的结构, 近年来有许多学者考虑各种非线性效应的影响, 讨论了板在不同荷载形式下的振动问题。因为在公路路面、机场跑道、停机场、工业地坪及建筑基础等多种工程中都会遇到地基板的计算分析, 所以弹性地基板的研究具有十分重要的工程意义。Sathya moorthy 等^[1~4]对薄板非线性问题进行了研究。曲庆璋等^[5]对线性地基上矩形板振动等问题进行了研究。Gajiendar^[6]、Nath^[7]、Dumir^[8]、邱平^[9]等研究了非线性弹性地基上圆薄板的振动问题。

本文考虑了阻尼和地基非线性效应的影响, 建立了小挠度矩形板在纵向均布简谐激励作用下的非线性动力学方程。利用对该类型板非线性弯曲问题的研究, 找到了能够满足所有边界条件的近似挠度函数, 然后用 Galerkin 方法把用偏微分方程表示的

非线性动力学方程转化为用常微分方程表示的非线性动力学方程。应用多尺度法研究了系统主参数共振的问题, 最后讨论了不同参数对系统主参数共振的影响。

2 基本方程

考虑图 1 所示的两边简支矩形薄板, 板厚为 h , 长、宽分别为 a 和 b , 在其左右边界上受有均匀分布简谐压力 N , 板单元的动力方程由式 (2) 给出:

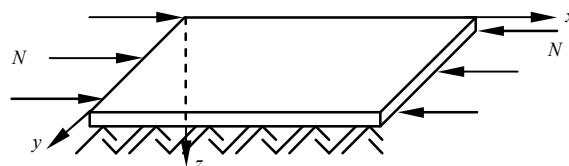


图 1 非线性弹性地基上矩形薄板模型
Fig.1 The model of rectangular thin plate on nonlinear elastic foundation

收稿日期: 2004-06-12

修改稿收到日期: 2004-11-20

作者简介: 杨志安, 男, 1963 年生, 博士, 教授, 博士后, 主要从事机电耦联非线性动力学及结构与振动工程的教学与研究工作。

E-mail: yangzhian@eyou.com

$$D\nabla^2\nabla^2W(x,y,t)+k_1W+k_2W^3+\rho h\frac{\partial^2W}{\partial t^2}+c\frac{\partial W}{\partial t}+N\frac{\partial^2W}{\partial x^2}=0 \quad (1)$$

$$N=P_0+P_1\cos\Omega t \quad (2)$$

式中 $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; $\nabla^2\nabla^2=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$;

W 为板的横向挠度; ρ 为板单位体积的质量; c 为阻尼系数; E 为弹性模量; ν 为泊松比; k_1 和 k_2 分别为线性和非线性地基系数。

两边简支的边界条件为

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } W=0, \quad \frac{\partial^2W}{\partial x^2}=0;$$

$$\text{在 } x=\bar{a} \text{ 处, } W=0, \quad \frac{\partial^2W}{\partial x^2}=0;$$

因此, 假定满足边界条件的位移模式为

$$W(x,y,t)=U_1(t)\sin\frac{\pi x}{\bar{a}}\sin\frac{\pi y}{b}+U_2(t)\sin\frac{2\pi x}{\bar{a}}\sin\frac{2\pi y}{b} \quad (3)$$

将 W 代入到式 (1) 中, 将产生残差 R , 即

$$R=D\nabla^2\nabla^2W(x,y,t)+k_1W+k_2W^3+\rho h\frac{\partial^2W}{\partial t^2}+c\frac{\partial W}{\partial t}+N\frac{\partial^2W}{\partial x^2} \quad (4)$$

为限制残差 R , 可通过伽辽金方法建立求解过程:

$$\iint R W_i(x,y) dx dy = 0 \quad (i=1,2) \quad (5)$$

$$\text{即} \quad \int_0^{\bar{a}} \int_0^b R \sin\frac{\pi x}{\bar{a}} \sin\frac{\pi y}{b} dx dy = 0 \quad (6)$$

$$\int_0^{\bar{a}} \int_0^b R \sin\frac{2\pi x}{\bar{a}} \sin\frac{2\pi y}{b} dx dy = 0 \quad (7)$$

由式 (6)、式 (7) 可得到双模态的非线性动力方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{a}b\rho h}{4}\ddot{U}_1(t)+\frac{\bar{a}bc}{4}\dot{U}_1(t)+\frac{9\bar{a}bk_2}{64}U_1(t)^3+ \\ & \frac{\bar{a}b}{4}U_1(t)\left[D\left(\frac{\pi^2}{\bar{a}^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2+k_1+\right. \\ & \left.\frac{3}{4}k_2U_2(t)^2-\frac{\pi^2}{\bar{a}^2}N\right]=0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{a}b\rho h}{4}\ddot{U}_2(t)+\frac{\bar{a}bc}{4}\dot{U}_2(t)+\frac{9\bar{a}bk_2}{64}U_2(t)^3+ \\ & \frac{\bar{a}b}{4}U_2(t)\left[16D\left(\frac{\pi^2}{\bar{a}^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2+k_1+\right. \\ & \left.\frac{3k_2}{4}U_1(t)^2\right]-\frac{\pi^2bN}{\bar{a}}U_2(t)=0 \end{aligned} \quad (9)$$

整理可得

$$\begin{aligned} & \ddot{U}_1(t)+\frac{c}{\rho h}\dot{U}_1(t)+\frac{9k_2}{16\rho h}U_1(t)^3+ \\ & \frac{U_1(t)}{\rho h}\left[D\left(\frac{\pi^2}{\bar{a}^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2+k_1+\right. \\ & \left.\frac{3}{4}k_2U_2(t)^2-\frac{\pi^2}{\bar{a}^2}N\right]=0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{U}_2(t)+\frac{c}{\rho h}\dot{U}_2(t)+\frac{9k_2}{16\rho h}U_2(t)^3+ \\ & \frac{U_2(t)}{\rho h}\left[16D\left(\frac{\pi^2}{\bar{a}^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2+k_1+\right. \\ & \left.\frac{3}{4}k_2U_2(t)^2+\frac{3k_2}{4}U_1(t)^2\right]-\frac{4\pi^2N}{\bar{a}^2\rho h}U_2(t)=0 \end{aligned} \quad (11)$$

利用式 (10)、(11) 可研究双参数地基上的两边简支矩形薄板非线性振动问题。下面分析系统的主参数共振。

3 单模态系统的主参数共振

为研究单模态系统的主参数共振, 将式 (2) 代入式 (10), 令 $U_2(t)=0$, 即得单模态系统参数激励作用下的非线性振动方程:

$$\begin{aligned} & \ddot{U}_1(t)+\frac{c}{\rho h}\dot{U}_1(t)+\frac{9k_2}{16\rho h}U_1(t)^3+ \\ & \frac{U_1(t)}{\rho h}\left[D\left(\frac{\pi^2}{\bar{a}^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2+k_1-\frac{\pi^2}{\bar{a}^2}P_0\right]= \\ & \frac{U_1(t)\pi^2}{\rho h\bar{a}^2}P_1\cos\Omega t \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{令 } \tau=\frac{1}{2}\Omega t, \quad q=U_1(t)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1(t) &= \frac{dU_1(t)}{dt} = \frac{dq}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{\Omega}{2} \frac{dq}{d\tau} \\ \ddot{U}_1(t) &= \frac{d^2U_1(t)}{dt^2} = \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 \frac{d^2q}{d\tau^2} = \frac{\Omega^2}{4} \frac{d^2q}{d\tau^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

把式 (13) 代入式 (12), 因为阻尼项、非线性项与惯性力项相比是小项, 又因为要研究系统的主参数共振, 故在阻尼项、非线性项、参数激励项前冠以小参数 ε , 整理得

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + 2\varepsilon\mu \frac{dq}{d\tau} + \omega^2 q + \varepsilon\alpha q^3 = \varepsilon g \cos 2\tau \quad (14)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{c}{\rho h \Omega} \\ \omega^2 &= \frac{4}{\rho h \Omega^2} \left[D \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) - \frac{\pi^2}{a^2} P_0 + k_1 \right] \\ \alpha &= \frac{9}{16 \rho h} k_2 \frac{4}{\Omega^2}, \quad g = \frac{P_T \pi^2}{\rho h a^2} \frac{4}{\Omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

为了简化研究过程, 不失一般性, 在主参数共振情况下设

$$\omega = 1 + \varepsilon \sigma \quad (16)$$

这里 σ 是调谐值, 采用多尺度法^[10], 取两个时间尺度 T_0, T_1 。设主参数共振情况下的一次近似解为

$$q(\tau) = q_0(T_0, T_1) + \varepsilon q_1(T_0, T_1) \quad (17)$$

将式(17)代入式(14), 并考虑式(16)比较 ε 同次幂的系数得

$$D_0^2 q_0 + q_0 = 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 q_1 + q_1 &= -2D_0 D_1 q_0 - 2\mu D_0 q_0 - \\ &2\sigma q_0 - \alpha q_0^3 + g q_0 \cos(2T_0) \end{aligned} \quad (19)$$

方程(18)的解是

$$q_0(T_0, T_1) = A(T_1) e^{jT_0} + cc \quad (20)$$

这里 cc 表示等式右端函数的共轭复数部分。

其中

$$A(T_1) = \frac{a(T_1)}{2} e^{j\beta(T_1)} \quad (21)$$

将式(20)代入式(19)右端得

$$\begin{aligned} D_0^2 q_1 + q_1 &= \left[-2D_1 A j - 2\mu j A - 2\sigma A - 3A^2 \bar{A} \alpha + \right. \\ &\left. \frac{g}{2} \bar{A} \right] e^{jT_0} + \left[\alpha A^3 + \frac{gA}{2} \right] e^{3jT_0} + cc \end{aligned} \quad (22)$$

消除永年项的条件为

$$-2D_1 A j - 2\mu j A - 2\sigma A - 3A^2 \bar{A} + \frac{g \bar{A}}{2} = 0 \quad (23)$$

即得

$$D_1 A = -\mu A + j\sigma A + \frac{3}{2} A^2 \bar{A} \alpha j - \frac{1}{4} j g \bar{A} \quad (24)$$

将式(21)代入式(24), 并展成三角函数形式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{da}{dT_1} (\cos \beta + j \sin \beta) + \frac{a}{2} j \frac{d\beta}{dT_1} (\cos \beta + j \sin \beta) = \\ -\mu \frac{a}{2} (\cos \beta + j \sin \beta) + j\sigma \frac{a}{2} (\cos \beta + j \sin \beta) + \\ \alpha j \frac{3}{2} \frac{a^3}{8} (\cos \beta + j \sin \beta) - \frac{9}{4} \frac{a}{2} j (\cos \beta - j \sin \beta) \end{aligned} \quad (25)$$

分离实部和虚部, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{da}{dT_1} \cos \beta - \frac{a}{2} \frac{d\beta}{dT_1} \sin \beta &= -\mu \frac{a}{2} \cos \beta - \\ \sigma \frac{a}{2} \sin \beta - \frac{3}{16} a^3 \alpha \sin \beta - \frac{ga}{8} \sin \beta \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{da}{dT_1} \sin \beta + \frac{a}{2} \frac{d\beta}{dT_1} \cos \beta &= -\mu \frac{a}{2} \sin \beta + \\ \sigma \frac{a}{2} \cos \beta + \frac{3}{16} a^3 \alpha \cos \beta - \frac{ga}{8} \cos \beta \end{aligned} \quad (27)$$

从式(26)和式(27)解出 $\frac{da}{dT_1}, \frac{d\beta}{dT_1}$, 得到下列极坐标形式的平均方程:

$$\frac{da}{dT_1} = -\mu a - \frac{g}{4} a \sin 2\beta \quad (28)$$

$$a \frac{d\beta}{dT_1} = \sigma a + \frac{3}{8} \sigma a^3 - \frac{ga}{4} \cos 2\beta \quad (29)$$

令 $\frac{da}{dT_1} = 0, \frac{d\beta}{dT_1} = 0$, 得到定常解的振幅 a 和相位 β 满足的代数方程:

$$\mu^2 a^2 + (\sigma a + \frac{3}{8} \alpha a^3)^2 = \frac{g^2 a^2}{16} \quad (30)$$

或

$$\left. \begin{aligned} 9\alpha^2 a^4 + 48\alpha\sigma a^2 + 4(16\sigma^2 + 16\mu^2 - g^2) &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

4 计算实例

弹性地基上的矩形薄板上受纵向力 N , 且 $N = P_0 + P_T \cos \Omega t$ 。参数取值为 $\rho = 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $c = 0.1$, $E = 3.5 \times 10^9 \text{ Pa}$, $\nu = 0.15$, $\bar{a} = 3.5 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $h = 0.2 \text{ m}$, $P_0 = 6 \times 100 \text{ N/m}$, $P_T = 800 \text{ N/m}$ 。按式(30)、式(31)可以计算系统主参数共振的各种响应曲线。

在图 2 中, $k_1 = 4 \times 10^8 \text{ N/m}^3$, $k_2 = 4 \times 10^7 \text{ N/m}^3$, 在图 3 中, $k_1 = 2 \times 10^9 \text{ N/m}^3$, $k_2 = 2 \times 10^8 \text{ N/m}^3$, 从

上述两图中可以看出随着地基系数的增大, 板的振幅减小, 因为 k_2 为非线性地基项, 所以地基系数 k_2 的大小直接影响曲线的弯曲程度。即同样大的线性地基系数, 非线性地基系数越大, 板的振幅越小。

同时只有当满足条件 $0 < \sigma < \frac{g}{4}$ 时, 才能发生参数共振。因此在小挠度板的动力分析中非线性地基系数起着非常重要的作用。

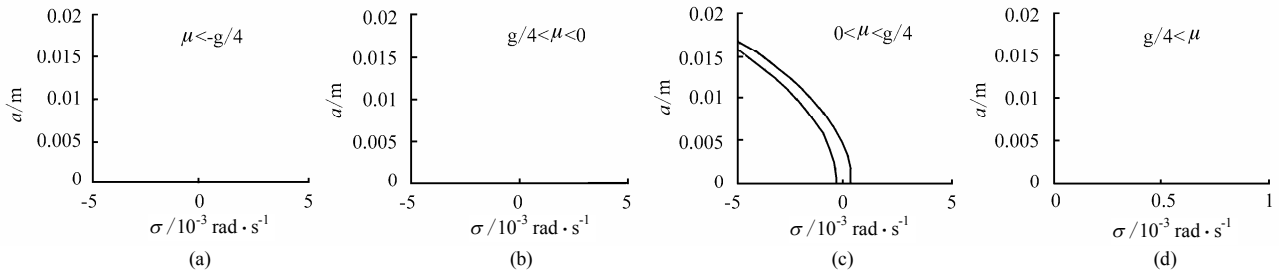


图2 幅频响应曲线

Fig.2 Amplitude-frequency response curves

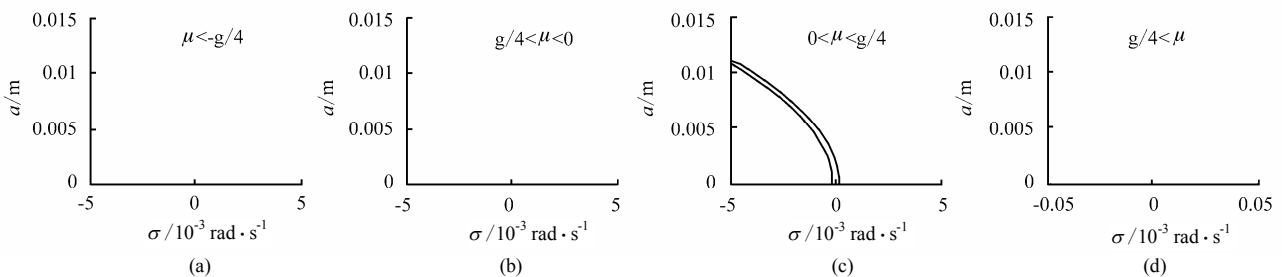


图3 幅频响应曲线

Fig.3 Amplitude-frequency response curves

在图4 振幅-板厚响应曲线中, 可以看到在薄板范围内, 振幅 a 随着板厚 h 的增大而增大。在图5 振幅-阻尼响应曲线中, $k_1 = 4 \times 10^8 \text{ N/m}^3$, $k_2 = 4 \times 10^7 \text{ N/m}^3$ 。在图6 振幅-阻尼响应曲线中, $k_1 = 2 \times 10^8 \text{ N/m}^3$, $k_2 = 2 \times 10^7 \text{ N/m}^3$ 。在图7 振幅-外激励响应曲线中, 振幅随着激励 P_T 的增大而增大。参数取值不同, 振幅-阻尼响应曲线的拓扑结构会发生变化。为了更清楚地反映振幅与地基系数的关系, 下面作振幅与地基系数的响应曲线。从图8中可以看出, 在其它参数不变的情况下, 随着地基系数 k_1 的增加, 系统主参数共振响应曲线的振幅减小。

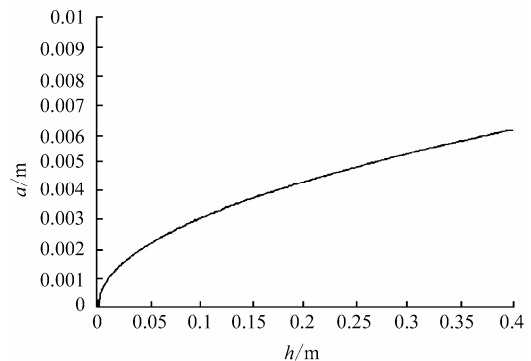


图4 振幅-板厚响应曲线

Fig.4 Amplitude-thickness of plate response curves

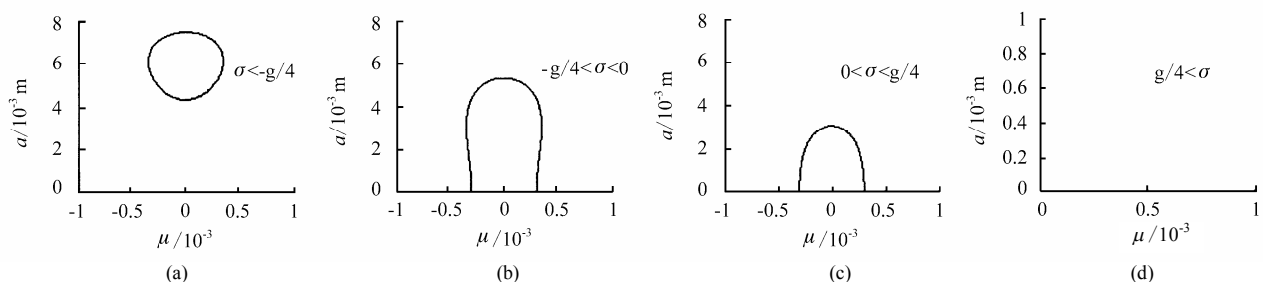


图5 振幅-阻尼响应曲线

Fig.5 Amplitude-damping response curves

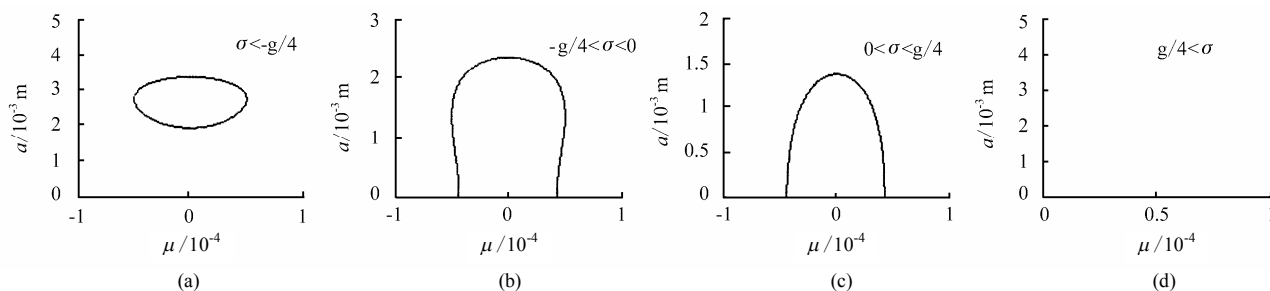


图 6 振幅-阻尼响应曲线

Fig.6 Amplitude- damping response curves

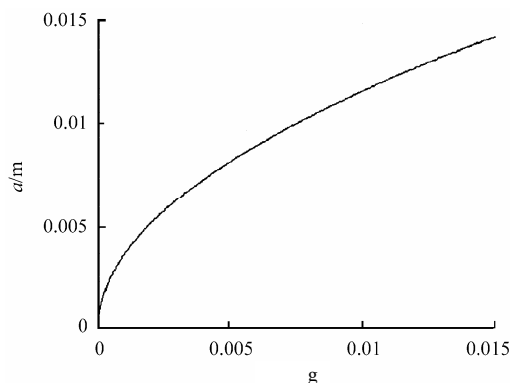
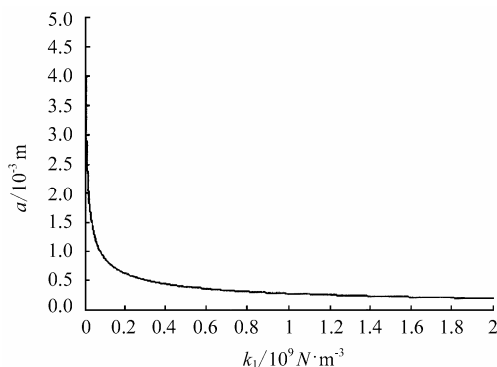


图 7 振幅-外激励幅值响应曲线

Fig.7 Amplitude-amplitude of excitation response curves

图 8 振幅-地基系数 k_1 响应曲线Fig.8 Amplitude-foundation coefficient k_1 response curves

5 结 论

建立了非线性弹性地基上小挠度矩形板在均布纵向简谐力作用下的非线性动力学方程。利用伽辽金方法将用偏微分方程描述的非线性动力学方程转化为用常微分方程描述的非线性动力学方程,应用多尺度法对系统的主参数共振进行了研究,分析了阻尼系数、地基系数、几何参数等对系统主参数共振的振幅及拓扑结构的影响。理论分析与数值计算结果表明,系统要发生主参数共振,既需要满足频率条件,还需要满足参数条件。随着地基系数的增加,系统主参数共振的振幅减小。在薄板范围内,系统主参数共振的振幅随着板厚的增加而增大。阻尼影响系统主参数共振曲线的拓扑结构。以上结论有

待于实验的进一步验证,对工程实际具有参考价值。

参 考 文 献

- [1] Sathyamoorthy M. Nonlinear vibration of plates-a review[J]. *Shock Vibration Digest*, 1983, 15: 3—16.
- [2] FENG Z C, SETHNA P R. Global bifurcations in the motion of parametrically and externally thin plates[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1993, 4: 389—408.
- [3] 韩强, 杨桂通. 非线性大挠度矩形板中内共振导致的分叉[J]. *固体力学学报*, 2001, 22(2): 199—204.
HAN Qiang, YANG Gui-tong. Bifurcation analysis of a nonlinear rectangular plate with large deflection[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 22(2): 199—204.
- [4] 袁尚平, 张惠桥, 王冰, 等. 参数激励下简支板的分岔与混沌[J]. *太原重型机械学院学报*, 1997, 18(2): 133—139.
YUAN Shang-ping, ZHANG Hui-qiang. The bifurcation and chaos of hinged plate under parameter excitement[J]. *Journal of Taiyuan Heavy Machinery Institute*, 1997, 18(2): 133—139.
- [5] 曲庆章, 梁兴复. 弹性地基上自由矩形板的非线性动静态分析[J]. *工程力学*, 1996, 13(3): 40—46.
QU Qing-Zhang, LIANG Xing-fu. Nonlinear analysis of free rectangular plate on elastic foundation[J]. *Engineering Mechanics*, 1996, 13(3): 40—46.
- [6] Ajiendar N. Large amplitude vibrations of plates on elastic foundation[J]. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1967, 2(1):163—168.
- [7] Nath. Large amplitude response of circular plate on elastic foundation[J]. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1982, 17(4): 285—296.
- [8] Dumir P C. Nonlinear vibration and postbuckling of isotropic thin circular plate on elastic foundation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1986, 107(2):253—263.
- [9] 邱平, 王新志. 非线性弹性地基上的圆薄板的分岔与混沌问题[J]. *应用数学和力学*, 2003, 24(8): 779—784.
QIU Ping, WANG Xin-zhi. Bifurcation and chaos problem of thin circular plate on nonlinear elastic foundation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, 24(8): 779—784.
- [10] Nayfeh A H, Mook D T. *Nonlinear Oscillations*[M]. New York: Wiley-Interscience, 1979.